sober 空間の圏から frame の圏への自然な反変関手の充満忠実性

本稿では、位相幾何学および圏論において重要な関係である、sober 空間 (sober space) の圏から frame の圏への自然な反変関手 (contravariant functor) が充満忠実 (fully faithful) であることの証明を、基礎的な定義から自己完結的 (self-contained) に解説します。

1. 圏論と順序集合の基礎概念

まずは、議論の土台となる半順序集合 (partially ordered set) や圏 (category) に関する基本的な定義を確認します。

定義 1.1 (半順序集合)

集合 P 上の二項関係 $\leq$ が、反射律、反対称律、推移律を満たすとき、$(P, \leq)$ を**半順序集合 (partially ordered set)** と呼びます。
部分集合 $S \subseteq P$ に対して、その**上限 (supremum)** または**結び (join)** を $\bigvee S$ と表し、**下限 (infimum)** または**交わり (meet)** を $\bigwedge S$ と表します。

定義 1.2 (圏と関手)

圏 (category) $\mathcal{C}$ は、対象 (objects) の集まりと、対象の間の射 (morphisms) の集まりから構成されます。
圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への**反変関手 (contravariant functor)** $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ とは、$\mathcal{C}$ の対象 X に $\mathcal{D}$ の対象 $F(X)$ を対応させ、射 $f : X \to Y$ に射 $F(f) : F(Y) \to F(X)$ を対応させるものであり、恒等射と射の合成を保存するものです。

定義 1.3 (充満忠実)

反変関手 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ が与えられたとき、各対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、写像

$$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$$

が定まります。

- 任意の X, Y で $F_{X,Y}$ が**単射 (injective)** であるとき、F は**忠実 (faithful)** であると言います。
- 任意の X, Y で $F_{X,Y}$ が**全射 (surjective)** であるとき、F は**充満 (full)** であると言います。

両方を満たすとき、F は**充満忠実 (fully faithful)** であると言います。

2. frame の圏 $\mathbf{Frm}$

定義 2.1 (frame)

frame (frame) とは、次の条件を満たす半順序集合 $(L, \leq)$ のことです。

1. 任意の有限個の交わり（下限 $\wedge$、および最大元 1）を持つ。
2. 任意の大きさの結び（上限 $\bigvee$、および最小元 0）を持つ。
3. 次の**無限分配律 (infinite distributive law)** を満たす。

$$x \wedge \left(\bigvee_{i \in I} y_i \right) = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i) \quad (\forall x \in L, \{y_i\}_{i \in I} \subseteq L)$$

定義 2.2 (frame 準同型)

2つの frame L, M の間の写像 $\phi : L \to M$ が**frame 準同型 (frame homomorphism)** であるとは、有限交わりと任意結びを保存すること、すなわち次を満たすことを言います。

- $\phi(1) = 1$
- $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b) \quad (\forall a, b \in L)$
- $\phi\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) = \bigvee_{i \in I} \phi(a_i) \quad (\forall \{a_i\}_{i \in I} \subseteq L)$

対象を frame とし、射を frame 準同型とする圏を **frame の圏 (category of frames)** と呼び、$\mathbf{Frm}$ で表します。

例 2.3 (位相空間の開集合系)

任意の位相空間 (topological space) X に対し、その開集合 (open set) 全体の成す族 $\mathcal{O}(X)$ は、包含関係 $\subseteq$ に関して半順序集合となります。任意和が開集合となり、有限共通部分が開集合となるという位相の公理により、$\mathcal{O}(X)$ は frame になります。 また、clopen (clopen) な集合（開かつ閉集合）や、超不連結 (extremally disconnected) な空間の開集合系なども、特定の性質を持つ frame を構成します。

3. sober 空間と点の特徴付け

位相空間論において、空間の「点」と「閉集合」の関係性を圏論的に捉え直す上で重要なのが **sober 空間 (sober space)** です。

定義 3.1 (既約閉集合)

位相空間 X の閉集合 (closed set) F が**既約閉集合 (irreducible closed set)** であるとは、$F \neq \emptyset$ であり、かつ $F = F_1 \cup F_2$（ただし F_1, F_2 は閉集合）ならば $F = F_1$ または $F = F_2$ が成り立つことを言います。

定義 3.2 (sober 空間)

位相空間 X が **sober 空間 (sober space)** であるとは、任意の既約閉集合 F に対して、$F = \overline{\{x\}}$ を満たす点 $x \in X$ がただ一つ存在すること（一意な点の閉包 (closure) として表されること）を言います。

圏論や frame の文脈では、sober 空間を frame を使って次のように特徴付けます。

定理 3.3 (点の frame 論的特徴付け)

2点からなる frame を $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ (ただし $0 < 1$) とします。frame L から $\mathbf{2}$ への frame 準同型全体の集合を $\mathrm{Pt}(L)$ と書き、これを L の**点 (points)** と呼びます。
位相空間 X の点 $x \in X$ に対し、写像 $p_x : \mathcal{O}(X) \to \mathbf{2}$ を以下で定義します。

$$p_x(U) = \begin{cases} 1 & (x \in U) \\ 0 & (x \notin U) \end{cases}$$

このとき、p_x は frame 準同型となります。さらに、位相空間 X が sober 空間であることの必要十分条件は、対応 $\eta_X : X \to \mathrm{Pt}(\mathcal{O}(X))$ $(x \mapsto p_x)$ が**全単射 (bijective)** となることです。

定理 3.3 の証明の概略

η_X の全単射性と定義 3.2 の同値性を示します。
frame 準同型 $\phi : \mathcal{O}(X) \to \mathbf{2}$ が与えられたとき、$\mathcal{U} = \phi^{-1}(1)$ は $\mathcal{O}(X)$ の完全素フィルター (completely prime filter) となり、その補集合 $\mathcal{P} = \phi^{-1}(0)$ は $\mathcal{O}(X)$ における主イデアルとなります。すなわち、$\mathcal{P}$ の和集合を $W = \bigcup \mathcal{P}$ とすると、ϕ が任意和を保存するため $\phi(W) = 0$ となり、$W \in \mathcal{P}$ が最大の開集合として存在します。
このとき、$F = X \setminus W$ とおくと、F は既約閉集合となります。逆に既約閉集合 F があれば、$F \cap U = \emptyset$ となる開集合全体から frame 準同型が構成できます。この対応により、既約閉集合と $\mathrm{Pt}(\mathcal{O}(X))$ は 1 対 1 に対応します。
したがって、「任意の既約閉集合が唯一の点 x の閉包になる」という sober 空間の条件は、「任意の frame 準同型 $\phi \in \mathrm{Pt}(\mathcal{O}(X))$ が唯一の p_x と一致する」という条件（すなわち η_X が全単射）と同値になります。

4. 反変関手 $\mathcal{O} : \mathbf{Sob}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Frm}$ の定義

sober 空間を対象とし、連続写像 (continuous map) を射とする圏を $\mathbf{Sob}$ とします。
位相空間の間の連続写像 $f : X \to Y$ に対し、逆像写像 $f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ は、和集合と共通部分を保存するため frame 準同型になります。
これにより、自然な反変関手

$$\mathcal{O} : \mathbf{Sob}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Frm}$$

が定義されます。この関手が充満忠実であることを示すのが本稿の主眼です。すなわち、任意の sober 空間 X, Y に対して、次の写像が全単射であることを示します。

$$\mathcal{O}_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sob}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Frm}}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X)) \quad (f \mapsto f^{-1})$$

5. 充満忠実性の証明

定理 5.1

反変関手 $\mathcal{O} : \mathbf{Sob}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Frm}$ は充満忠実 (fully faithful) である。

証明

写像 $\mathcal{O}_{X,Y} : f \mapsto f^{-1}$ が「単射（忠実）」かつ「全射（充満）」であることを示します。

① 忠実性 (Faithfulness) の証明：単射性

$f, g : X \to Y$ を sober 空間の間の連続写像とし、$\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(g)$、すなわちすべての開集合 $V \in \mathcal{O}(Y)$ に対して

$f^{-1}(V) = g^{-1}(V)$ であると仮定します。
任意の点 $x \in X$ をとります。すべての Y の開集合 $V \in \mathcal{O}(Y)$ に対して、次が成り立ちます。

$$f(x) \in V \iff x \in f^{-1}(V) \iff x \in g^{-1}(V) \iff g(x) \in V$$

ここで、sober 空間は自動的に T_0 **空間 (T_0 space)**（任意の異なる2点に対し、片方を含みもう片方を含まない開集合が存在する空間）となります（既約閉集合の閉包の一意性から、異なる点は異なる閉包を持つため）。
もし $f(x) \neq g(x)$ であれば、Y が T_0 空間であることから、片方を含みもう片方を含まない開集合 V が存在しなければなりませんが、上の同値性からそれは不可能です。
したがって、すべての $x \in X$ で $f(x) = g(x)$ となり、$f = g$ が従います。よって $\mathcal{O}_{X,Y}$ は**単射 (injective)** です。

② 充満性 (Fullness) の証明：全射性

任意の frame 準同型 $\phi : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ が与えられたとき、$\phi = f^{-1}$ となる連続写像 $f : X \to Y$ を構成します。
各点 $x \in X$ に対し、対応する frame 準同型 $p_x : \mathcal{O}(X) \to \mathbf{2}$ を用いて、合成写像 $p_x \circ \phi$ を考えます。

$$\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(X) \xrightarrow{p_x} \mathbf{2}$$

frame 準同型の合成は再び frame 準同型なので、$p_x \circ \phi \in \mathrm{Pt}(\mathcal{O}(Y))$ です。
ここで Y **が sober 空間であること**、すなわち定理 3.3 における $\eta_Y : Y \to \mathrm{Pt}(\mathcal{O}(Y))$ が全単射であることを用います。これにより、各 $x \in X$ に対して次を満たす Y の点 y が**一意に**存在します。

$$p_y = p_x \circ \phi$$

この一意に定まる y を $f(x)$ と定義することで、写像 $f : X \to Y$ が得られます。

この f が $\phi = f^{-1}$ を満たすことを確認します。任意の開集合 $V \in \mathcal{O}(Y)$ に対し、$x \in X$ を任意にとると、

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(V) &\iff f(x) \in V \\ &\iff p_{f(x)}(V) = 1 \quad (p_y \text{ の定義より}) \\ &\iff (p_x \circ \phi)(V) = 1 \quad (f(x) \text{ の定義より } p_{f(x)} = p_x \circ \phi) \\ &\iff p_x(\phi(V)) = 1 \\ &\iff x \in \phi(V) \end{aligned}$$

これが任意の $x \in X$ で成り立つため、部分集合として $f^{-1}(V) = \phi(V)$ が成り立ちます。
$\phi(V)$ は $\mathcal{O}(X)$ の元、すなわち X の開集合であるため、$f^{-1}(V)$ も開集合となります。任意の開集合の逆像が開集合になることから、f は**連続 (continuous)**（すなわち $\mathbf{Sob}$ の射）です。
そして定義から $\phi = f^{-1} = \mathcal{O}(f)$ となるため、$\mathcal{O}_{X,Y}$ は**全射 (surjective)** です。

以上より、$\mathcal{O}_{X,Y}$ は全単射となり、反変関手 $\mathcal{O}$ は充満忠実であることが証明されました。 ■

参考文献

nLab, "Sober space", https://ncatlab.org/nlab/show/sober+space

nLab, "Frame", https://ncatlab.org/nlab/show/frame

Wikipedia (English), "Sober space", https://en.wikipedia.org/wiki/Sober_space

Johnstone, P. T. (1982). *Stone Spaces*. Cambridge University Press.